Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 5

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (20 Μόρια)
Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ είναι $\mathbb{R}$ −διανυσματικός χώρος με τις πράξεις

$$\oplus : x \oplus y := x \cdot y,\ x, y > 0$$

$$\odot : \lambda \odot x = x^\lambda, x > 0, \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Θέμα 2 (25 Μόρια)
Εξετάστε αν το σύνολο

(i) $V_1 = \{(a, b, a+1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$,

(ii) $V_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : 2f(1) = 3f(2)\}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

(iii) $V_3 = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : r(A) = n-1\} \cup \{\mathbb{O}_n\}$, όπου $n \geq 2$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,

(iv) $V_4 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \lim\limits_n x_n = 0\}$, είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Σημείωση: Τα σύνολα $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ είναι εφοδιασμένα με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Θέμα 3 (25 Μόρια)

(i) Αποδείξτε ότι το σύνολο $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : c = a - b,\ d = a + b\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (με τις συνήθεις πράξεις).

(ii) Εξετάστε αν το διάνυσμα $w = (1, 3, -1, 0) \in \langle(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\rangle$.

(iii) Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία το διάνυσμα $v = \left(k, \frac{1}{2}, -1, 0\right)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $(1, 0, 1, 1)$ και $(0, 1, -1, 1)$.

Θέμα 4 (30 Μόρια)
Θεωρούμε τους $\mathbb{R}$- υποχώρους V και W του $\mathbb{R}^3$ (με τις συνήθεις πράξεις), όπου

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0\} \text{ και } W = \{(-y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Αποδείξτε ότι $V + W = \mathbb{R}^3$.

(ii) Να γράψετε το διάνυσμα $(1, -1, 4) \in \mathbb{R}^3$ σαν άθροισμα ενός διανύσματος του V και ενός διανυσματος του W.

(iii) Εξετάστε αν $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ